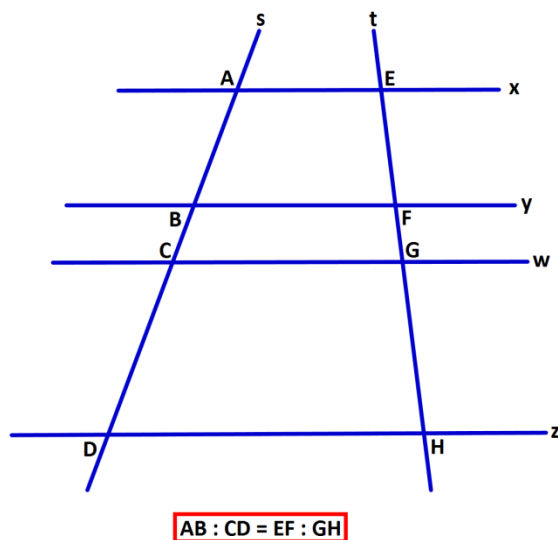


Dal teorema di Talete ai criteri di similitudine dei triangoli di Luciano Porta

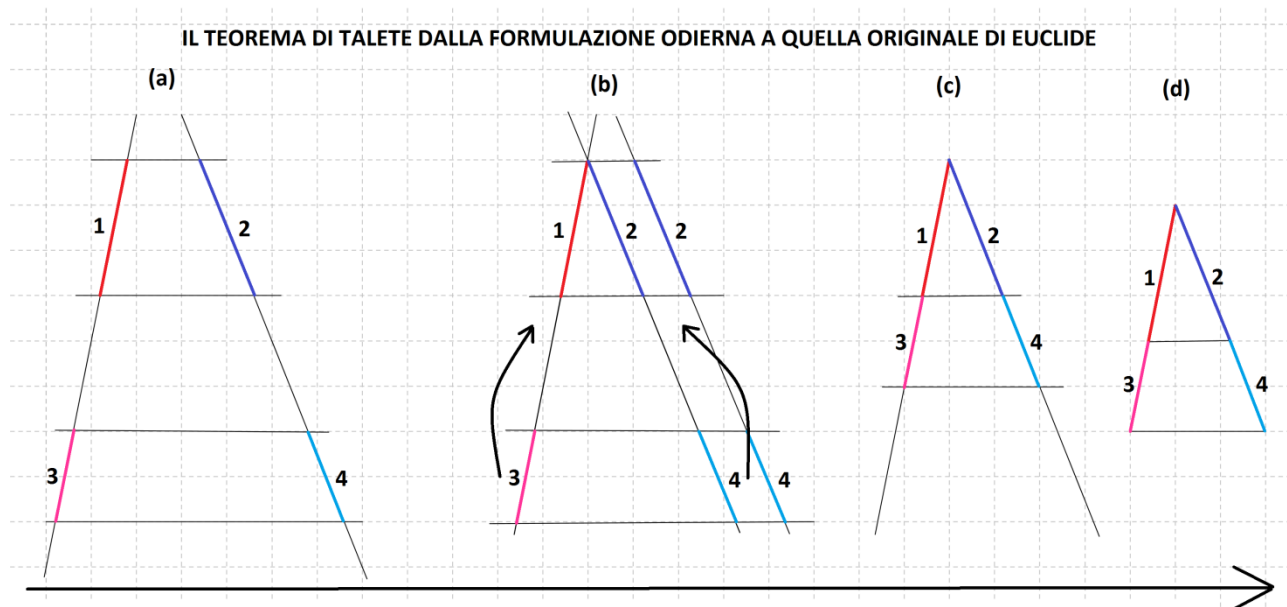
Il teorema di Talete è uno dei più applicati della geometria e il suo enunciato è molto noto:

“Un fascio di rette parallele tagliate da due trasversali genera coppie di segmenti direttamente proporzionali”.



La prima dimostrazione e il primo enunciato del teorema, conosciuto già dai babilonesi prima di Talete, appaiono negli **Elementi di Euclide (libro sesto, proposizione due)** e sono molto diversi, anche se equivalenti, da quelli solitamente conosciuti.

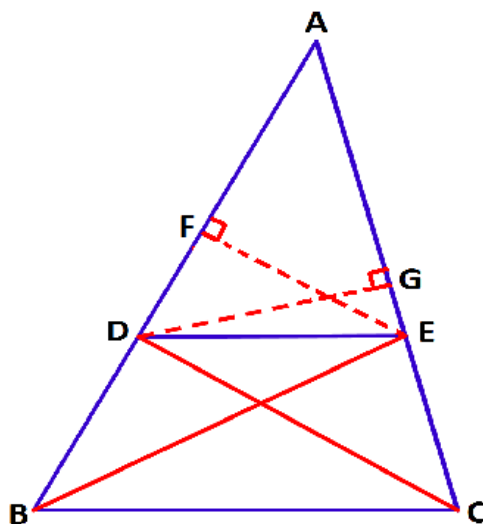
Euclide centra l'essenza del problema e espone, nella stessa frase, sia l'enunciato diretto, sia quello inverso. Nella successione delle immagini affiancate **a – b – c – d** possiamo osservare come dall'enunciato attuale del teorema si possa risalire a quello di Euclide.



Ora esponiamo l'**enunciato di Euclide** del cosiddetto **teorema di Talete**:

“Se in un triangolo si traccia una parallela a uno dei suoi lati essa divide gli altri due proporzionalmente e se due lati sono divisi proporzionalmente, la retta che unisce i punti di divisione è parallela al terzo lato”.

Le dimostrazioni, sia del teorema diretto, sia di quello inverso, saranno sostanzialmente, con gli opportuni adattamenti, quelle di Euclide.



Dimostrazione del teorema diretto:

Se in un triangolo si traccia una parallela a uno dei suoi lati essa divide gli altri due proporzionalmente.

Nel triangolo ABC tracciamo la parallela DE al lato BC. Tracciamo i segmenti BE e CD.

I due triangoli BED e CED sono equivalenti avendo la stessa base DE e la stessa altezza (i segmenti DE e BC sono paralleli).

Quindi il rapporto tra l'area di ciascuno di essi e quello del triangolo ADE è uguale:

$$1) \quad A(BDE) : A(ADE) = A(CDE) : A(ADE)$$

Consideriamo ora i triangoli BDE e ADE. Poiché hanno la stessa altezza FE, il rapporto tra le loro aree è uguale al rapporto tra le loro basi:

$$2) \quad A(BDE) : A(ADE) = BD : AD$$

Consideriamo ora i triangoli CDE e ADE. Poiché hanno la stessa altezza DG, il rapporto tra le loro aree è uguale al rapporto tra le loro basi:

$$3) \quad A(CDE) : A(ADE) = CE : AE$$

Dalla 2) e dalla 3), considerando la 1), si ottiene: $BD : AD = CE : AE$

Dimostrazione del teorema inverso:

Se in un triangolo due lati sono divisi proporzionalmente, la retta che unisce i punti di divisione è parallela al terzo lato.

L'enunciato afferma che:

$$1) \quad BD : AD = CE : AE$$

Consideriamo ora i triangoli BDE e ADE. Poiché hanno la stessa altezza FE, il rapporto tra le loro aree è uguale al rapporto tra le loro basi:

$$2) \quad A(BDE) : A(ADE) = BD : AD$$

Consideriamo ora i triangoli CDE e ADE. Poiché hanno la stessa altezza DG, il rapporto tra le loro aree è uguale al rapporto tra le loro basi:

$$3) \quad A(CDE) : A(ADE) = CE : AE$$

Dalla 2) e dalla 3), considerando la 1), si ottiene: $A(BDE) : A(ADE) = A(CDE) : A(ADE)$ in cui, essendo uguali i conseguenti sono anche uguali gli antecedenti:

$$A(BDE) = A(CDE)$$

I due triangoli considerati sono perciò equivalenti e hanno in comune la base DE.

Devono avere pertanto anche la stessa altezza.

Pertanto i segmenti DE e BC sono paralleli.

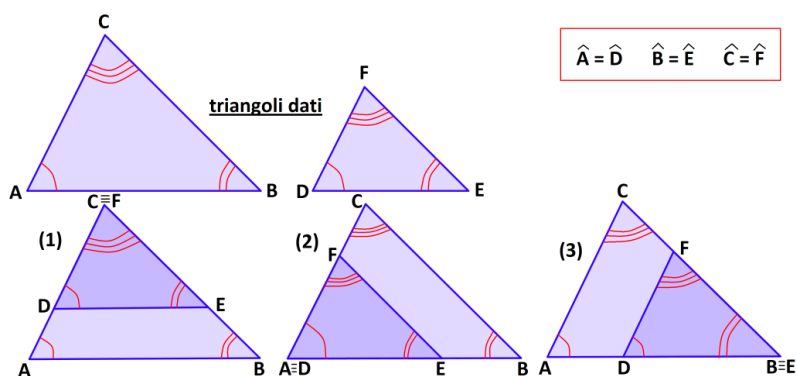
Criteri di similitudine dei triangoli

Applicando la proposizione due del libro sesto degli elementi di Euclide e i criteri già provati, possiamo dimostrare i **tre criteri** di similitudine dei triangoli.

Ricordiamo che due poligoni sono simili se hanno uguali gli angoli corrispondenti e se hanno i lati corrispondenti proporzionali.

Primo criterio:

Due triangoli sono simili se hanno gli angoli corrispondenti uguali (osserviamo che poiché la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto possiamo non considerare il terzo angolo)



Sovrapponiamo i due triangoli ABC e DEF in modo che siano sovrapposti gli angoli $\hat{C}$ e $\hat{F}$ (situazione 1).

I lati opposti a questi angoli AB e DE sono paralleli poiché le rette a cui appartengono formano con le trasversali angoli corrispondenti uguali.

Possiamo così applicare la proposizione due del sesto libro degli elementi e scrivere la proporzione:

$$AD : FD = BE : FE$$

Applicando la proprietà del comporre:

$$(AD + FD) : FD = (BE + FE) : FE,$$

Pertanto: $\underline{CA : FD = CB : FE}$

Sovrapponendo gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{D}$ (situazione 2) similmente otteniamo:

$$\underline{AB : DE = AC : DF}$$

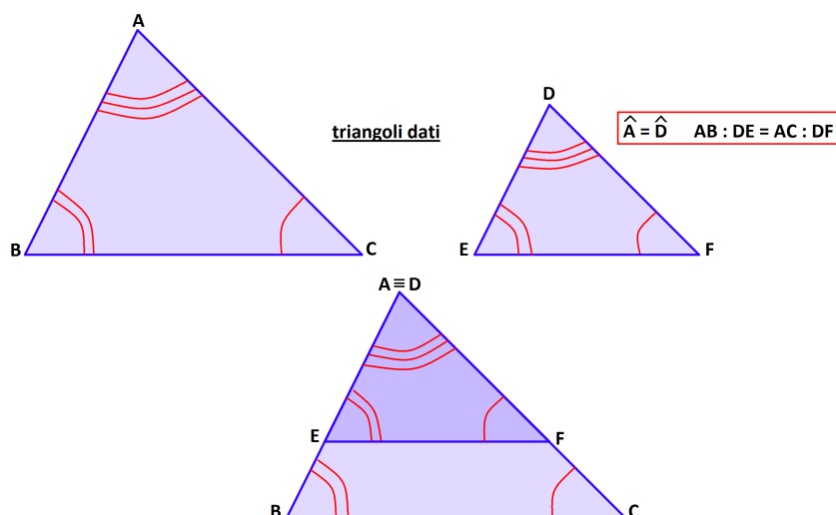
Sovrapponendo gli angoli $\hat{B}$ e $\hat{E}$ (situazione 3) similmente otteniamo:

$$\underline{AB : DE = CB : FE}$$

Pertanto i triangoli ABC e DEF sono simili perché hanno uguali a 2 a 2 gli angoli e hanno proporzionali i lati che li formano.

Secondo criterio:

Due triangoli sono simili se hanno uguale un angolo e se hanno proporzionali i lati che lo formano.



Sovrapponiamo i triangoli ABC e DEF in modo che gli angoli uguali $\hat{A}$ e $\hat{D}$ siano sovrapposti. I lati che formano questi angoli sono proporzionali e per la parte inversa della proposizione due del libro sesto degli elementi di Euclide i lati BC e EF, opposti agli angoli uguali, sono paralleli.

Quindi gli angoli $\hat{B}$ e $\hat{E}$ sono uguali perché corrispondenti generati da due parallele tagliate da una trasversale.

Sono uguali per lo stesso motivo gli angoli $\hat{C}$ e $\hat{F}$.

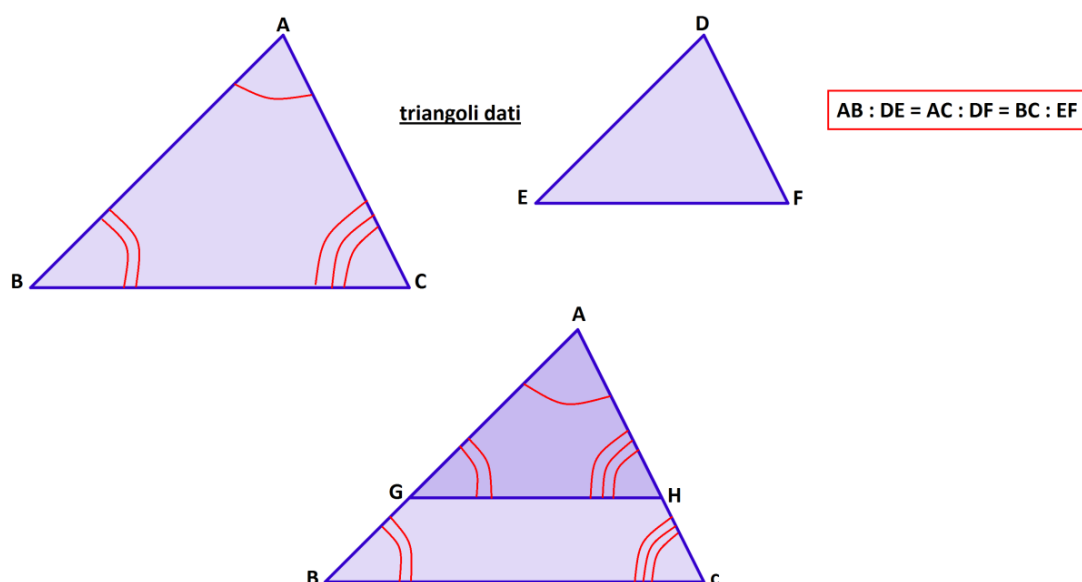
Pertanto i triangoli considerati hanno gli angoli uguali a due a due, sono simili per il primo criterio e hanno anche gli altri lati corrispondenti proporzionali:

$$\underline{AB : DE = BC : EF} \quad \text{e} \quad \underline{BC : EF = AC : DF}$$

Quindi i triangoli ABC e DEF sono simili perché hanno uguali a due a due gli angoli e hanno proporzionali i lati che li formano.

Terzo criterio:

Due triangoli sono simili se hanno i lati corrispondenti proporzionali.



Tracciamo sui lati AB e AC del triangolo ABC, partendo dal vertice A, due segmenti AG e AH uguali ai lati DE e DF del triangolo DEF e otteniamo il triangolo AGH.

Non possiamo affermare per il momento che i triangoli AGH e DEF sono uguali poiché non sappiamo se gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{D}$ sono uguali.

I triangoli ABC e AGH sono simili per il secondo criterio ed essendo simili hanno uguali i rispettivi angoli.

Considerando i triangoli ABC e AGH possiamo allora scrivere la proporzione:

$$1) \quad \underline{AB : AG = BC : GH}$$

Considerando i triangoli ABC e DEF possiamo scrivere la proporzione:

$$2) \quad \underline{AB : DE = BC : EF}$$

Ricordando che $AG = DE$, possiamo scrivere la 1) nel modo seguente:

$$1) \quad \underline{AB : DE = BC : GH}$$

Per l'unicità del quarto termine della proporzione ne consegue che $\underline{GH = EF}$ e pertanto i triangoli AGH (simile al triangolo ABC) e DEF sono uguali per il terzo criterio di uguaglianza.

Per la proprietà transitiva i triangoli ABC e DEF sono simili e hanno uguali a due a due gli angoli e proporzionali i lati che li formano.